Lycée secondaire Bennane-Bodher | Année scolaire:2008/2009

Feuille d'exercices n °10

3^{eme} *Math* et Sc | (***Suites réelles)*** | *Mr: Bouhouch Ameur*

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_n = 2n - 1$
a) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique dont on précisera le premier terme u_0 et la raison r.
b) Calculer en fonction de n, la somme :
$S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$
2. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $v_n = 2^{u_n}$
a) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique pour laquelle on précisera le premier terme v_0 et la raison q.
b) Calculer $P_n = v_0 \times v_1 \times \dots \times v_n$ en fonction de n

Exercice n°1:(

Soit α un nombre réel de l'intervalle]0,1[.

On considère la suite (U_n) définie sur IN par: $U_0=1$ et $U_{n+1}=\dfrac{1}{\alpha(2-\alpha U_n)}$, $n\in$ IN.

1) a) Montrer que pour tout entier naturel n, on a: $U_n \leq \dfrac{1}{\alpha}$.

   b) Montrer que (U_n) est une suite croissante.

2) Soit la suite (V_n) définie sur IN par : $V_n=\dfrac{\alpha}{\alpha U_n - 1}$

   a) Montrer que (V_n) est une suite arithmétique.
   b) Exprimer V_n en fonction de n et α .En déduire U_n en fonction de n et α .
   c) Calculer la limite de la suite (U_n) en fonction de α .

3) **Application:**

   Etudier la limite de la suite (w_n) définie par: $w_0=1$ et $w_{n+1}=\dfrac{1}{4-w_n}$; $n\in$ IN.

Exercice n°2:

On considère la suite (U_n) définie sur IN par $U_0=0$ et $U_{n+1}=\sqrt{\dfrac{1+U_n}{2}}$

1) Calculer U_1 et U_2. En déduire que la suite (U_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.
2) Montrer par récurrence que pour tout $n\in$ IN , on a : $0 \leq U_n \leq 1$.
3) Montrer que pour tout réel $x\in[0,\pi]$, on a : $\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{2}} = \cos\left(\dfrac{x}{2}\right)$.
4) a) Montrer alors que $U_n=\cos\left(\dfrac{\pi}{2^{n+1}}\right)$ pour tout $n\in$ IN.

   b) Calculer la limite de la suite (U_n).

5) Déduire la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

Exercice n°3:

Soit la suite réelle (U_n) définie sur IN* par: $U_n=\frac{E(\pi)+E(2\pi)+......E(n\pi)}{n^2}$ où $E(x)$ désigne la partie entière de x .

1) Montrer que pour tout $x\in$ IR, on a : $x-1<E(x)\leq x$.

2) En déduire que : $\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2n}-\frac{1}{n}\leq U_n\leq\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2n}$ pour tout $n\in$ IN*.

3) calculer alors la limite de la suite (U_n).

Exercice n°4:

Soit la suite réelle (U_n) définie sur IN par : $U_0=0$; $U_1=1$ et $U_{n+2}=aU_{n+1}+(1-a)U_n$ pour tout $n\in$ IN et a un réel tel que : $0<a<2$.

1) Soit la suite (V_n) définie sur IN par : $V_n=U_{n+1}-U_n$
   a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison $q=a-1$.
   b) Calculer (V_n) en fonction de n et a.
2) Soit la suite (W_n) définie sur IN par $W_n=U_{n+1}+(1-a)U_n$.
   Montrer que $W_n=1$ pour tout $n\in$ IN .
3) Prouver que $(2-a)U_n=W_n-V_n$.
4) Calculer la limite de la suite (U_n) en fonction de a .

Exercice n°5:

Soient les deux suites (U_n) et (V_n) définies sur IN par : $U_0=1$, $V_0=2$ et pour tout $n\in$ IN ,
$U_{n+1}=\frac{1}{3}(2U_n+V_n)$ et $V_{n+1}=\frac{1}{3}(U_n+2V_n)$.

1) Soit la suite $W_n=V_n-U_n$, pour tout $n\in$ IN.
   a) Montrer que W_n est une suite géométrique dont on précisera la raison .
   b) En déduire que $\lim_{n\to+\infty} U_n=\lim_{n\to+\infty} V_n$.
2) Montrer par récurrence que pour tout $n\in$ IN, on a: $U_n+V_n=3$.
3) En déduire que (U_n) et (V_n) sont convergentes vers une même limite qu'on déterminera.